第 10 講　ベクトル②

【CHECK & UP】

1　点 O を原点とする座標空間において，A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 2, 0) とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$|\overrightarrow{BA}|$，$|\overrightarrow{BC}|$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ．

(2)　△ABC の重心 G について，$\overrightarrow{OG}$ を求めよ．

(3)　△ABC の面積を求めよ．また，O から平面 ABC に垂線を下ろしたとき平面 ABC との交点を H とする．OH の長さを求めよ．

2　正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．辺 OA を 4：3 に内分する点を P，辺 BC を 5：3 に内分する点を Q とし，線分 PQ の中点を R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とする．$\overrightarrow{AS}=t\overrightarrow{AR}$ とおくとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，t の値と AR：RS を求めよ．

(3)　cos∠AOQ の値を求めよ．

3　四面体 OABC において，$OA=\sqrt{2}$，OB=3，OC=2，$AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{7}$，$CA=\sqrt{2}$ である．辺 AB の中点を D，辺 BC を 1：2 に内分する点を E とし，線分 AE と線分 CD との交点を F とする．また，点 F から平面 OBC 上におろした垂線と平面 OBC との交点を H をする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$ とするとき，α，β の値を求めよ．また，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(3)　点 H は平面 OBC 上の点であることより，$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{FO}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ と表すことができる．このとき，FH と平面 OBC が垂直であることを利用し，x，y の値を求めよ．

(4)　直線 OH と辺 BC との交点を M とするとき，BM：MC を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 四面体 OABC において，辺 OA を 1：2 に内分する点を D，辺 AB を 2：1 に内分する点を E とする．また，辺 OC の中点を F とする．

(1) $0<a<1$ として，線分 EF を $a:(1-a)$ に内分する点を G とすると

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\boxed{ア}}(\boxed{イ}-\boxed{ウ})\overrightarrow{OA}$$
$$+\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}(\boxed{イ}-\boxed{ウ})\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\overrightarrow{OC}$$

である．

(2) 3 点 O，B，C で定まる平面 OBC と直線 DG の交点を求めよう．点 P が直線 DG 上にあるとき，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DG}$$
$$=\frac{1-\boxed{ク}t}{\boxed{ケ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}(\boxed{イ}-\boxed{ウ})t\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}t\overrightarrow{OC}$$

と表せる．したがって，$t=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ のとき

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}(\boxed{イ}-\boxed{ウ})\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\overrightarrow{OC}\quad\cdots\cdots①$$

であり，このとき，点 P は平面 OBC 上にある．したがって，①を満たす点 P が平面 OBC と直線 DG の交点である．

(3) (2)で求めた交点 P が辺 BC 上にあるのは $a=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ のときである．このとき，さらに四面体 OABC が一辺の長さが 1 の正四面体ならば

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DP}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$$

である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1), D(−2, −1, −2) がある．$0<a<1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を E, 線分CD を $a:(1-a)$ に内分する点を F とする．

(1) $\overrightarrow{EF}$ は a を用いて

$$\overrightarrow{EF}=(\boxed{アイ}a,\ \boxed{ウエ}a,\ \boxed{オ}-\boxed{カ}a)$$

と表される．さらに，$\overrightarrow{EF}$ が $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のときである．

(2) $a=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ とする．$0<b<1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{OG}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{OG}=\left(\frac{\boxed{ケ}-\boxed{コ}b}{\boxed{サ}},\ \frac{\boxed{シ}-\boxed{ス}b}{\boxed{サ}},\ \frac{\boxed{セ}}{\boxed{サ}}\right)$$

と表される．

(3) (2)において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値と，その交点 H の座標を求めよう．

点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{BH}=s\overrightarrow{BC}$ と表される．また，ベクトル $\overrightarrow{OH}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{OH}=t\,\overrightarrow{OG}$ と表される．よって

$$b=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}},\quad s=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}},\quad t=\boxed{テ}$$

である．したがって，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}},\ \frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ナ}},\ \boxed{ネ}\right)$$

である．また，点 H は線分 BC を $\boxed{ノ}:1$ に外分する．

©RECRUIT HOLDINGS

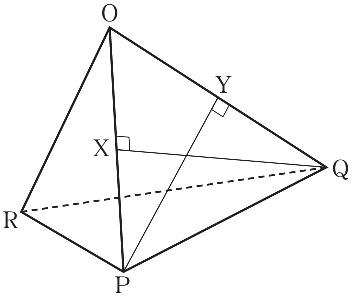
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 四面体 OPQR において，点 P，Q，R の点 O を基準とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とおく．OP＝4，OQ＝$3\sqrt{2}$，OR＝$2\sqrt{7}$ であり，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=12$ であるとする．辺 OP 上の点 X を，直線 QX と辺 OP が垂直であるようにとり，辺 OQ 上の点 Y を，直線 PY と直線 OQ が垂直であるようにとる．



(1) 実数 a を用いて $\overrightarrow{OX}=a\vec{p}$ と表す．このとき

$$\overrightarrow{QX}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{p}-\vec{q}$$

である．

直線 QX と辺 OP が垂直であるから，$a=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\overrightarrow{RX}\cdot\overrightarrow{OP}=\boxed{\text{エ}}$ である．

同様に $\overrightarrow{OY}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ であり，$\overrightarrow{RY}\cdot\overrightarrow{OQ}=\boxed{\text{キ}}$ である．

(2) 直線 QX と直線 PY との交点を H とする．$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}$$

である．

辺 OR 上に点 Z をとり，実数 s を用いて $\overrightarrow{OZ}=s\vec{r}$ と表す．3 点 P，Q，Z の定める平面を α とし，直線 HR と平面 α との交点を K とする．実数 t を用いて $\overrightarrow{HK}=t\overrightarrow{HR}$ と表す．このとき

$$\overrightarrow{OK}=(\boxed{\text{シ}}-t)\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}\right)+t\vec{r}$$

である．

一方，$\overrightarrow{OK}$ は実数 k，l を用いて $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PZ}+l\overrightarrow{PQ}$ とも表される．これらから

$$t=\frac{s}{\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}\,s}$$

である．

直線 PZ と辺 OR が垂直であるとき，$s=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，$t=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　ベクトル②

1　四面体OPQRにおいて，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$，$\overrightarrow{OR}=\vec{r}$ とおく．

(1)　$0<a<1$ として，線分OP，QRを $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれS，Tとすると

$$\overrightarrow{OS}=\boxed{ア}\vec{p},\ \overrightarrow{OT}=(\boxed{イ}-\boxed{ウ})\vec{q}+\boxed{エ}\vec{r}$$

である．線分OQ，PRの中点をそれぞれU，Wとし，線分UWを $a:(1-a)$ に内分する点をMとすれば

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\boxed{オ}}\{\boxed{カ}\vec{p}+(\boxed{キ}-\boxed{ク})\vec{q}+\boxed{ケ}\vec{r}\}$$

である．よって，Mは線分ST上にあり

$$SM:ST=1:\boxed{コ}$$

である．直線OMが三角形PQRと交わる点をNとする．このとき

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}+\boxed{ス}}\overrightarrow{OM}$$

である．（$\boxed{シ}$ と $\boxed{ス}$ は解答の順序を問わない．）

さらに，点Nが三角形PQRの重心Gと一致しているとする．このとき

$$a=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

である．

(2)　次に，$OP=OQ=\sqrt{2}$，$OR=1$，$\angle POR=90°$ で，点Oと三角形PQRの重心Gを通る直線OGが三角形PQRに垂直であるとき，∠POQの大きさと線分OGの長さを求めよう．直線OGが三角形PQRに垂直であるための条件は，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ であるから

$$\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{タ},\ \vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{チツ}$$

である．よって

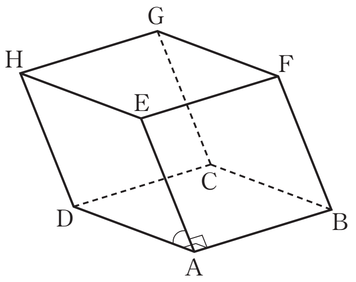
$$\angle POQ=\boxed{テトナ}°,\ OG=\frac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$$

である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 二つずつ平行な三組の平面で囲まれた立体を平行六面体という．辺の長さがすべて 1 の平行六面体 ABCD-EFGH があり，$\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAD}=\dfrac{\pi}{3}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{r}$ とおく．



$0<a<1$，$0<b<1$ とする．辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X，辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする．点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする．三角形 XYZ を含む平面を α とする．

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=$ **ア** ，$\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は，a，b，$\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=(1-\boxed{エ})\vec{p}+\boxed{オ}\vec{r}$　と表される．

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=$ **カ** である．

(2) 直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし，交点を K とする．$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ が三角形 XYZ の 2 辺と垂直であることから，$\boxed{キ}\,a+b=\boxed{ク}$ が成り立つ．

以下では，$b=\dfrac{1}{2}$ とする．このとき $a=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ である．一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s，t を用いて

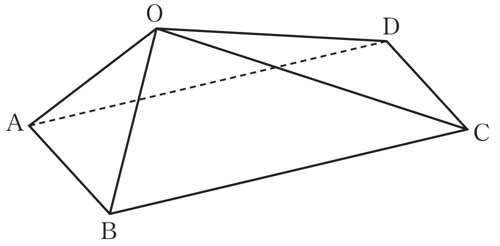
$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\left(\frac{1}{\boxed{サ}}s+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\boxed{シ}}s+t\right)\vec{r}$$

と表される．これらより，$c=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である．よって，点 E と平面 α との距離 $|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|$ は $\dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$ となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 四角錐(すい) O-ABCD において，三角形 OBC と三角形 OAD は合同で，OB＝1，BC＝2，OC＝$\sqrt{3}$ であり，底面の四角形 ABCD は長方形である．AB＝$2r$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\boxed{ア}}-\overrightarrow{\boxed{イ}}+\vec{c}$ である．辺 OD を 1：2 に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{a}-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{エ}}\vec{b}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$$

となる．

さらに辺 OB の中点を M，3 点 A，L，M の定める平面を α とし，平面 α と辺 OC との交点を N とする．点 N は平面 α 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ は実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(\boxed{キ}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\boxed{コ}}+\frac{t}{\boxed{サ}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\boxed{シ}}\vec{c}$$

となる．一方，点 N は辺 OC 上にもある．これらから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{c}$ となる．

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{ソ}-\boxed{タ}r^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{チ}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{ツテ}r^2$ である．よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を計算すると，AB＝$\sqrt{\boxed{ト}}$ のとき，直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　ベクトル②

【CHECK & UP】

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1,\ 0,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{\mathbf{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 2,\ 0)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{\mathbf{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1+0+0=\mathbf{1}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$$=\frac{1}{3}\{(0,\ 0,\ 1)+(1,\ 0,\ 0)+(0,\ 2,\ 0)\}$$

$$=\frac{1}{3}(1,\ 2,\ 1)=\left(\mathbf{\frac{1}{3}},\ \mathbf{\frac{2}{3}},\ \mathbf{\frac{1}{3}}\right)$$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2\times|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

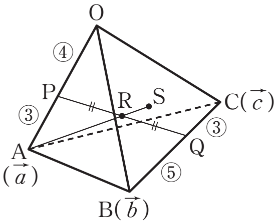
四面体 OABC の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}$

また　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{OC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\times2=\dfrac{1}{3}$　より

$\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}$　　ゆえに　$\mathrm{OH}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

> 成分表示の概念は平面でも空間でも同じ．始点から終点までの「進む量および方向」を示したものである．よってその「大きさ」は「三平方の定理」で計算できる．また，成分表示ならではの「内積の公式」も存在する．
> さらに，平面限定であるが成分表示ならではの「三角形の面積の公式」
> $\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$
> も存在する．空間にもあるにはあるが，「外積」の知識が必要であるため，センター前に覚えていない人が新たに覚える必要はない．
> 今回与えられた３点はすべて「座標軸」上に乗っている．そのことを利用した問題である．ちなみに乗っていない場合は，数Ⅲがからまない限り図示してもほぼ無意味．

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}\vec{b}+\mathbf{\dfrac{5}{8}}\vec{c}-\mathbf{\dfrac{4}{7}}\vec{a}$



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$$=\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{2}{7}}\vec{a}+\mathbf{\frac{3}{16}}\vec{b}+\mathbf{\frac{5}{16}}\vec{c}$$

> 空間においても，「分点」の表現は「２ベクトル」であることに変わりはない．ただし，その２ベクトルのそれぞれを出す際に，「伸縮」や「分点」などでさらに２ベクトルが絡む場合もあり，一般的に手数が増える．それに耐えうる計算力を身につけておかねばならない．

※もし，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ なしに直接 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を出すならば

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\mathbf{\frac{2}{7}}\vec{a}+\mathbf{\frac{3}{16}}\vec{b}+\mathbf{\frac{5}{16}}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=t\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{7}t\vec{a}+\frac{3}{16}t\vec{b}+\frac{5}{16}t\vec{c}$$

$$=\left(\mathbf{1-\frac{5}{7}}t\right)\vec{a}+\mathbf{\frac{3}{16}}t\vec{b}+\mathbf{\frac{5}{16}}t\vec{c}$$

> 第９講でも出てきた「１つのベクトルが不要」の空間版である．ベクトルの終点が「ある平面上にある」という問題の解法の１つである．

S は平面 OBC 上より，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表される．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$1-\dfrac{5}{7}t=0$　　ゆえに　$\boldsymbol{t=\dfrac{7}{5}}$　　このとき　AR：RS＝**5：2**

(3)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$ としても一般性を失わない．

このとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2\cdot2\cdot\dfrac{1}{2}=2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\frac{1}{8^2}|3\vec{b}+5\vec{c}|^2=\frac{1}{8^2}(9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2)$$

$$=\frac{1}{8^2}(36+60+100)=\frac{14^2}{8^2}=\left(\frac{7}{4}\right)^2$$

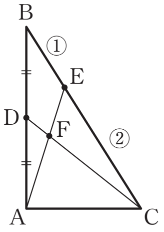
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\frac{1}{8}(3\cdot2+5\cdot2)=2$$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{2}{2\cdot\dfrac{7}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

> 今回の問題は，ベクトルの大きさについては一切触れられていない．かつ，「正四面体」であるため，すべての辺の長さが等しい．大きさが「不定」の状態でその「角度」が問われているため，その大きさは解答に影響しないのは当然であろう．今回は，分数を極力回避するために１辺の長さを２とした．

3　(1)　点 F は CD 上の点であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{BD}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}\quad\cdots\cdots①$$



点 F は AE 上の点であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は１次独立より，①，②から

$\dfrac{1}{2}(1-s)=1-t$，$s=\dfrac{t}{3}$　　よって　$s=\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$，$\beta=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}(\vec{a}-\vec{b})+\dfrac{1}{5}(\vec{c}-\vec{b})=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}}$

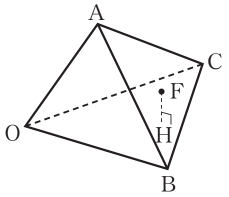
(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+9-5}{2}=\mathbf{3}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{9+4-7}{2}=\mathbf{3}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{4+2-2}{2}=\mathbf{2}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



(3)　FH⊥平面 OBC より

$\overrightarrow{FH}\cdot\vec{b}=0$ ……①　かつ　$\overrightarrow{FH}\cdot\vec{c}=0$ ……②

である.

①より　$\left(-\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{c}+x\vec{b}+y\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$

$(5x\vec{b}+5y\vec{c}-2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$5x\cdot9+5y\cdot3-2\cdot3-2\cdot9-3=0$

よって　$15x+5y=9$ ……①′

②より　$(5x\vec{b}+5y\vec{c}-2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{c}=0$

$5x\cdot3+5y\cdot4-2\cdot2-2\cdot3-4=0$

よって　$15x+20y=14$ ……②′

①′, ②′ より　$x=\mathbf{\frac{22}{45}}$, $y=\mathbf{\frac{1}{3}}$

空間ベクトルにおいて利用する知識でもっとも重要なものの１つは,「直線がある平面に垂直」⇔「直線の方向ベクトルが平面上の１次独立である２つのベクトルと垂直」である. 近年のセンターではそれが問題文中に表記されることが多いが, それがなくとも問題の流れから平面に含まれるベクトルの内２つを選択し, それと直線の方向ベクトルとの内積をとって 0 にする.
内積をとったあとの式は「パラメータに関する連立方程式」である. よって, 内積をとる前の式をベクトルごと（$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ごと）にまとめる必要は全くない.
また「ある点が平面上にある」ことの知識は, 今回は「たどる」ことでまず平面上に移動したが, 他にも「終点がその平面上にある１次独立な３ベクトル」で表し,「係数の和が 1」とする流れもある.

(4)　(3)より　$\overrightarrow{OH}=\frac{22}{45}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OH}=\frac{22}{45}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ と表すと, M は BC 上の点より

$\frac{22}{45}k+\frac{1}{3}k=1$　　$k=\frac{45}{37}$

よって　$\overrightarrow{OM}=\frac{22}{37}\vec{b}+\frac{15}{37}\vec{c}$　より　BM：MC＝**15：22**

最後は「平面ベクトル」. 今回はパラメータ k を設定して伸ばし,「係数の和＝1」としたが, もちろん以下のように変形により導いてもよい.

$\overrightarrow{OH}=\frac{22}{45}\vec{b}+\frac{15}{45}\vec{c}$

$=\frac{37}{45}\left(\frac{22}{37}\vec{b}+\frac{15}{37}\vec{c}\right)$

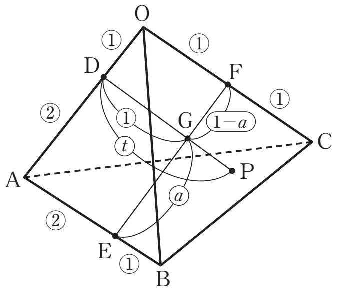
数列と比較すれば, 図形分野であるベクトルは, その解法が非常に多岐にわたるがゆえに, センター試験側から提示された「流れ」を理解すれば誘導に乗って解くことができる. よって,「たどり」と「分割」,「伸縮」と「分点」など, 本来同じところに行き着くものを相互変換できるようになっている必要がある. 様々な問題を経験することで問題を一歩引いた始点から眺めることができるようになる. それが遅いと, ベクトルの計算量は数学ⅡBで１, ２位を争う分野であるため最後まで行けないということもある. 全てを記すことなく「大きさ」や「内積」などの値を代入しつつどんどん進められるよう, 計算練習を怠らないこと.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．



(1)　G が線分 EF を $a:(1-a)$ に内分する点であることより

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+a\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-a)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+a\cdot\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

(2)　P が直線 DG 上にあることより

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

$$=(1-t)\cdot\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}(1-a)t\vec{a}+\frac{2}{3}(1-a)t\vec{b}+\frac{a}{2}t\vec{c}$$

$$=\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{a}t}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}(1-a)t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{a}{2}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は平面 OBC 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ の形で表される．

よって　$\dfrac{1-at}{3}=0$　　$t=\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}\boldsymbol{a}}(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(3)　P が辺 BC 上にあるのは　$\dfrac{2}{3a}(1-a)+\dfrac{1}{2}=1$　　$\dfrac{2}{3a}(1-a)=\dfrac{1}{2}$

よって　$a=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$ のとき

さらに　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot1^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 0,\ 0)+a(-1,\ 1,\ 1)=(-a+1,\ a,\ a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+a\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ 0,\ 1)+a(-3,\ -1,\ -3)=(-3a+1,\ -a,\ -3a+1)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(\mathbf{-2}a,\ \mathbf{-2}a,\ \mathbf{1-4}a)$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$(-2a,\ -2a,\ 1-4a)\perp(-1,\ 1,\ 1)$

よって　$2a-2a+1-4a=0$　　$a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(2)　$a=\dfrac{1}{4}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(3,\ 1,\ 1)$，

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(1,\ -1,\ 1)$　　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)=-\dfrac{1}{2}(1,\ 1,\ 0)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\dfrac{1}{4}\{(3,\ 1,\ 1)-2b(1,\ 1,\ 0)\}=\left(\dfrac{\mathbf{3-2}b}{\mathbf{4}},\ \dfrac{\mathbf{1-2}b}{4},\ \dfrac{\mathbf{1}}{4}\right)$

(3)　H が BC 上より　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表すと，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 1,\ 1)+s(1,\ -1,\ 0)=(s,\ -s+1,\ 1)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，H は OG 上より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{3-2b}{4}t,\ \dfrac{1-2b}{4}t,\ \dfrac{1}{4}t\right)$

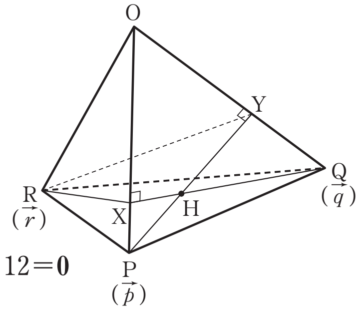
よって　$s=\dfrac{3-2b}{4}t$　……①　　$-s+1=\dfrac{1-2b}{4}t$　……②　　$1=\dfrac{1}{4}t$　……③

③より　$t=\mathbf{4}$　　これを①，②に代入して　$s=3-2b$　　$-s+1=1-2b$

よって　$b=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$，$s=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

ゆえに　$\mathrm{H}\left(\mathbf{\dfrac{3}{2}},\ \mathbf{-\dfrac{1}{2}},\ \mathbf{1}\right)$

$s=\dfrac{3}{2}$ より，H は線分 BC を $\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}:1$ に外分する．



3 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=a\vec{p}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{QX}}=\boldsymbol{a}\vec{p}-\vec{q}$

$\overrightarrow{\mathrm{QX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$　より　$(a\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{p}=0$

$16a-12=0$　　ゆえに　$a=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{RX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{3}{4}\vec{p}-\vec{r}\right)\cdot\vec{p}=\dfrac{3}{4}\cdot4^2-12=\mathbf{0}$

同様に　$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=b\vec{q}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\vec{q}=0$　より　$(b\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{q}=0$　　$18b-12=0$　　ゆえに　$b=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{RY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{q}-\vec{r}\right)\cdot\vec{q}=\dfrac{2}{3}\cdot18-12=\mathbf{0}$

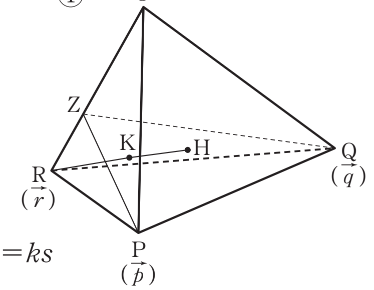
(2)　メネラウスの定理より　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PX}}\cdot\dfrac{\mathrm{XH}}{\mathrm{HQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{QY}}{\mathrm{YO}}=1$　つまり　$\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{XH}}{\mathrm{HQ}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{XH}}{\mathrm{HQ}}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\vec{p}+\dfrac{1}{3}\vec{q}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}\vec{p}+\mathbf{\dfrac{1}{3}}\vec{q}$

$\overrightarrow{\mathrm{HK}}=t\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OH}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(\mathbf{1}-t)\left(\dfrac{1}{2}\vec{p}+\dfrac{1}{3}\vec{q}\right)+t\vec{r}$　……①



また，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=s\vec{r}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PZ}}+l\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{p}+k(\overrightarrow{\mathrm{OZ}}-\vec{p})+l(\vec{q}-\vec{p})$

$=(1-k-l)\vec{p}+l\vec{q}+k\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$

$=(1-k-l)\vec{p}+l\vec{q}+ks\vec{r}$　……②

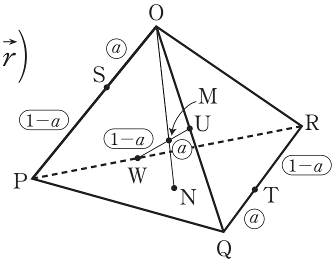
①，②より　$\dfrac{1}{2}(1-t)=1-k-l$　　$\dfrac{1}{3}(1-t)=l$　　$t=ks$

よって　$\dfrac{1}{2}(1-t)=1-\dfrac{t}{s}-\dfrac{1}{3}(1-t)$　　$t=\dfrac{s}{\mathbf{6-5}s}$

さらに　$\overrightarrow{\mathrm{PZ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=0$ より　$(s\vec{r}-\vec{p})\cdot\vec{r}=0$　　$28s-12=0$　　ゆえに　$s=\mathbf{\dfrac{3}{7}}$，$t=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　ベクトル②



1 (1) $\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{a}\vec{p}$　　$\overrightarrow{OT}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})\vec{q}+\boldsymbol{a}\vec{r}$

$\overrightarrow{OM}=(1-a)\overrightarrow{OU}+a\overrightarrow{OW}=(1-a)\times\dfrac{1}{2}\vec{q}+a\left(\dfrac{1}{2}\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{r}\right)$

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{a}\vec{p}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})\vec{q}+\boldsymbol{a}\vec{r}\}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT})$

よって，点 M は線分 ST の中点．

ゆえに　SM：ST$=1:\mathbf{2}$

また　$\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}ak\vec{p}+\dfrac{1}{2}(1-a)k\vec{q}+\dfrac{1}{2}ak\vec{r}$　とおくと

N は平面 PQR 上より　$\dfrac{1}{2}ak+\dfrac{1}{2}(1-a)k+\dfrac{1}{2}ak=1$　　$(a+1)k=2$　　$k=\dfrac{2}{a+1}$

よって　$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{a}+\mathbf{1}}\overrightarrow{OM}=\dfrac{a}{a+1}\vec{p}+\dfrac{1-a}{a+1}\vec{q}+\dfrac{a}{a+1}\vec{r}$

さらに，点 N が三角形 PQR の重心と一致しているとき　$\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{1}{3}$

よって　$a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2) $|\vec{p}|=|\vec{q}|=\sqrt{2}$，$|\vec{r}|=1$，$\vec{p}\cdot\vec{r}=0$

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$　より　$\dfrac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{q}-\vec{p})=0$

$\vec{p}\cdot\vec{q}-|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2-\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{r}=0$　　よって　$\vec{q}\cdot\vec{r}=\mathbf{0}$

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{QR}=0$　より　$\dfrac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{r}-\vec{q})=0$

$\vec{p}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}\cdot\vec{r}-|\vec{q}|^2+|\vec{r}|^2-\vec{r}\cdot\vec{q}=0$　　よって　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\mathbf{-1}$

$\cos\angle POQ=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$\angle POQ=\mathbf{120}^\circ$

$|\overrightarrow{OG}|^2=\dfrac{1}{3^2}|\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}|^2=\dfrac{1}{3^2}(2+2+1-2)=\dfrac{3}{3^2}$　　ゆえに　$OG=|\overrightarrow{OG}|=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$

2 (1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\mathbf{0}$，$\vec{q}\cdot\vec{r}=1\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BY}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})\vec{p}+\boldsymbol{b}\vec{r}$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})=|\vec{q}|^2-|\vec{r}|^2=\mathbf{0}$

(2) EC$\perp$平面 α より　$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=0$　かつ　$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY}=0$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XY}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot\{(1-a)\vec{p}+b\vec{r}\}=0$

$(1-a)+\dfrac{1}{2}b-b=0$　　ゆえに　$\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{2}$

以下，$b=\dfrac{1}{2}$ とする．このとき　$a=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\overrightarrow{EK}=c\overrightarrow{EC}$ とすると

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AE}+c\overrightarrow{EC}=\vec{r}+c(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})=c\vec{p}+c\vec{q}+(1-c)\vec{r}$$

また，点 K は平面 α 上より

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AX}+s\overrightarrow{XY}+t\overrightarrow{XZ}=\frac{3}{4}\vec{p}+s\left(\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+t(\vec{q}+\vec{r})$$

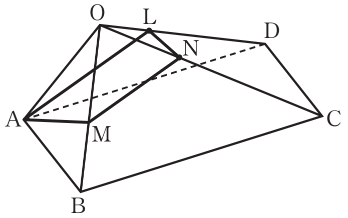
$$=\left(\frac{1}{\mathbf{4}}s+\frac{3}{4}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\mathbf{2}}s+t\right)\vec{r}$$

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は 1 次独立より　$c=\frac{1}{4}s+\frac{3}{4}$，$t=c$，$\frac{1}{2}s+t=1-c$　　よって　$c=t=\mathbf{\frac{5}{8}}$

$$|\overrightarrow{EK}|^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2|\overrightarrow{EC}|^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2|\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}|^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2(1+1+1-1)=\left(\frac{5}{8}\right)^2\times 2$$

ゆえに　$|\overrightarrow{EK}|=\mathbf{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$

3　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}+\vec{c}$　　$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}-\vec{a}=-\mathbf{\frac{2}{3}}\vec{a}-\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{b}+\frac{\mathbf{1}}{3}\vec{c}$



$\overrightarrow{AN}=s\,\overrightarrow{AL}+t\,\overrightarrow{AM}$ と表すとき

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　より

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}$$

$$=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\mathbf{3}}+\frac{t}{\mathbf{2}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\mathbf{3}}\vec{c}$$

また，N は辺 OC 上より　$\overrightarrow{ON}=k\vec{c}$ と表せる．

よって　$1-\frac{2}{3}s-t=0$，$-\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=0$　　$s=\frac{3}{4}$，$t=\frac{1}{2}$　このとき　$\overrightarrow{ON}=\mathbf{\frac{1}{4}}\vec{c}$　となる．

また，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\overrightarrow{AB}|=2r$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1+1-(2r)^2}{2}=\mathbf{1-2r^2}$

$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{BC}|=2$ より　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1+3-4}{2}=\mathbf{0}$

$|\overrightarrow{AC}|^2=4r^2+4$ より　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1+3-(4r^2+4)}{2}=\mathbf{-2r^2}$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{8}(\vec{b}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-2\vec{b})=\frac{1}{8}\{-2\times1^2-2\times(-2r^2)+4(1-2r^2)\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r^2$$

よって　$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r^2=0$　　$r^2=\frac{1}{2}$　　$r=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (>0)$

つまり　$AB=\mathbf{\sqrt{2}}$　のとき $AM\perp MN$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。